(a) $\displaystyle\int x\sin x\ \ \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int 2xe^{-x}\ \ \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \log(1+x)\ \ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 2x\log(x-5)\ \ \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int x\log^2(5x)\ \ \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int (x+1)^2\cos x\ \ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int 2x\arctan x\ \ \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int e^x\sin x\ \ \mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \ \mathrm{d}x$.

Ricordiamo la regola di integrazione per parti:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x\ = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) Per ricavare $\displaystyle\int x\sin x\ \mathrm{d}x$ scegliamo $\begin{cases} f'(x)=\sin x \\ g(x)=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=-\cos x \\ g'(x)=1 \end{cases}$

Otteniamo:

$$\int x\sin x\ \mathrm{d}x\ = -x\cos x - \int(-\cos x)\ \mathrm{d}x\ = -x\cos x + \sin x + c$$

(b) Per ricavare $\displaystyle\int 2xe^{-x}\ \ \mathrm{d}x\ = 2\int xe^{-x}\ \ \mathrm{d}x$, conviene scegliere $\begin{cases} f'(x)=e^{-x} \\ g(x)=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=-e^{-x} \\ g'(x)=1 \end{cases}$

Dunque:

$$2\int xe^{-x}\ \ \mathrm{d}x\ = 2\left(-x\cdot e^{-x} - \int(-e^{-x})\ \ \mathrm{d}x\right) = 2(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x+1) + c.$$

(c) In questo caso conviene vedere la funzione integranda $\log(1+x)$ come prodotto della funzione costante 1 per la funzione $\log(1+x)$ e scegliere $\begin{cases} f'(x)=1 \\ g(x)=\log(1+x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ g'(x)=\dfrac{1}{1+x} \end{cases}$.

Pertanto $\displaystyle\int \log(1+x)\ \ \mathrm{d}x\ = x\log(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\ \ \mathrm{d}x$.

Per calcolare l'ultimo integrale, conviene prima eseguire un "trucco" algebrico, e poi sfruttare la linearità dell'integrale; nel prossimo esercizio vedremo un procedimento più completo che tratta dell'integrazione delle funzioni razionali.

Per ora, scriviamo:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x};$$

dunque

$$\int \frac{x}{1+x}\ \ \mathrm{d}x\ = \int\ \mathrm{d}x\ - \int \frac{1}{1+x}\ \ \mathrm{d}x\ = x - \log|1+x| + c.$$

Tornando all'integrale di partenza, si ha:

$$\int \log(1+x)\ \ \mathrm{d}x\ = x\log(1+x) - x + \log(1+x) + c.$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione integranda è definita solo per $x > -1$.

(d) $\int 2x\log(x-5)\ \mathrm{d}x\ = x^2\log(x-5) - \int \frac{x^2}{x-5}\ \mathrm{d}x$

Anche in questo caso, manipoliamo l'ultima funzione razionale, nel seguente modo:

$$\frac{x^2}{x-5} = \frac{x^2-25+25}{x-5} = \frac{x^2-25}{x-5} + \frac{25}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} + \frac{25}{x-5} = x+5+\frac{25}{x-5}.$$

Pertanto

$$\int 2x\log(x-5)\ \mathrm{d}x\ = x^2\log(x-5) - \int \left(x+5+\frac{25}{x-5}\right)\ \mathrm{d}x\ = x^2\log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25\log|x-5| + c$$

La funzione integranda è definita solo per $x > 5$; pertanto si avrà $|x-5| = x-5$. Dunque

$$\int 2x\log(x-5)\ \mathrm{d}x\ = x^2\log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25\log(x-5) + c.$$

(e) $\int x\log^2(5x)\ \mathrm{d}x\ = \frac{x^2}{2}\log^2(5x) - \int \frac{x^2}{2} 2\log(5x)\frac{5}{5x}\ \mathrm{d}x\ = \frac{x^2}{2}\log^2(5x) - \int x\log(5x)$

Riapplicando nuovamente la formula di integrazione per parti all'ultimo integrale, ricaviamo

$$\int x\log^2(5x)\ \mathrm{d}x\ = \frac{x^2}{2}\log^2(5x) - \left(\frac{x^2}{2}\log(5x) - \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x\ \right) = \frac{x^2}{2}\log^2(5x) - \frac{x^2}{2}\log(5x) + \frac{x^2}{4} + c$$

(f) $\int (x+1)^2\cos x\ \mathrm{d}x\ = (x+1)^2\sin x - \int 2(x+1)\sin x\ \mathrm{d}x\ = (x+1)^2\sin x + 2\left[(x+1)\cos x - \int \cos x\ \mathrm{d}x\ \right] =$

$= (x+1)^2\sin x + 2(x+1)\cos x - 2\sin x + c.$

(g) $\int 2x\arctan x\ \mathrm{d}x\ = x^2\arctan x - \int x^2\frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\ = x^2\arctan x - \int \frac{x^2+1\ -1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\ =$

$= x^2\arctan x - \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\ \mathrm{d}x\ = x^2\arctan x - x + \arctan x + c$

(h) $\int e^x\sin x\ \mathrm{d}x\ = e^x\sin x - \int e^x\cos x\ \mathrm{d}x\ = e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x\ \mathrm{d}x\ \right).$

Dunque

$$2\int e^x\sin x\ \mathrm{d}x\ = e^x\sin x - e^x\cos x$$

da cui

$$\int e^x\sin x\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c.$$

(i) $\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x\ = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x\ =$

$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

Dunque

$$2\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

da cui

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$