

Esercitazione di laboratorio di matematica

Funzioni inverse f^{-1}

Obiettivo dell'esercitazione: costruire le funzioni inverse di funzioni biettive utilizzando il programma applicativo derive.

Teoria: Siano definite delle funzioni reali di variabile reale f tali che siano funzioni biunivoche. Esiste quindi la funzione inversa $f^{-1}(x)$ tale che

$$(1) \quad f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$$

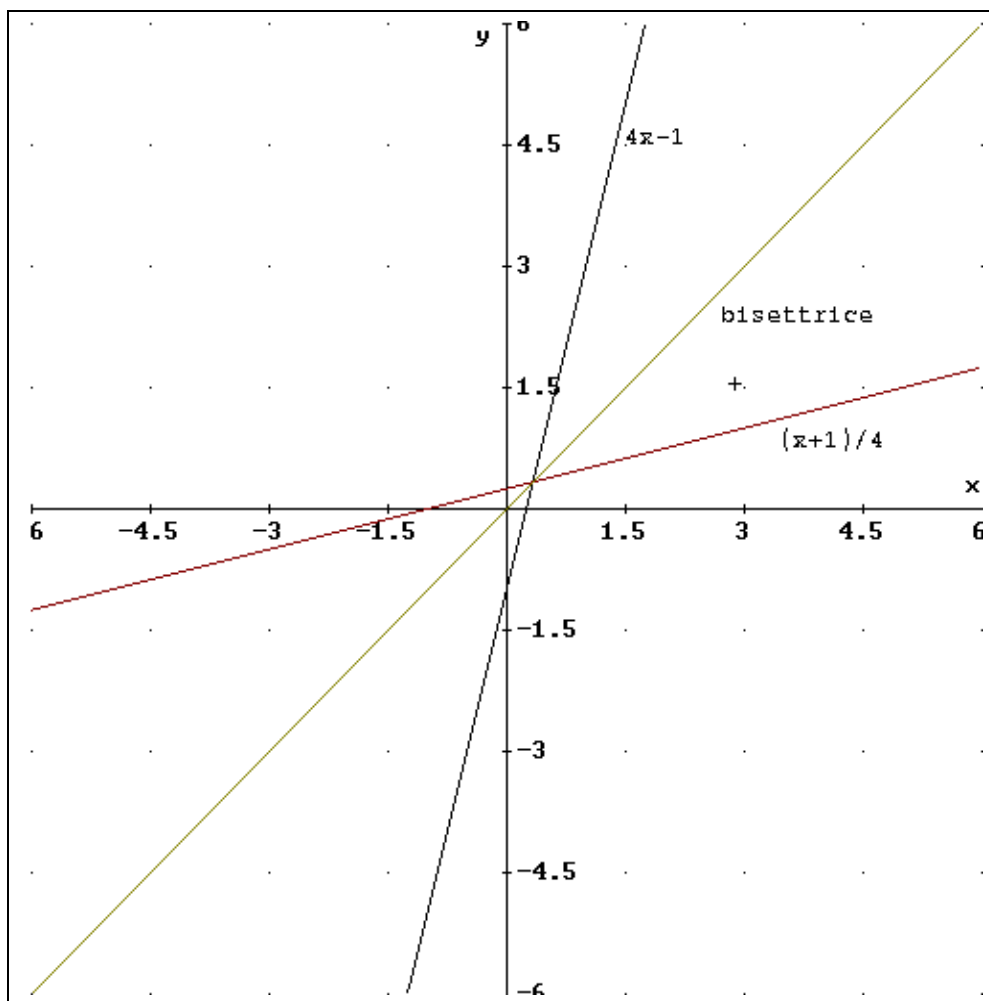
Vogliamo calcolare l'espressione di $f^{-1}(x)$, sia data p.e. $y = 4x-1$ per trovare y^{-1} si esplicita la x ottenendo

$$(2) \quad x = y/4 + 1 \text{ cioè } y^{-1} = (x + 1) / 4.$$

Eseguendo la composizione (1) otteniamo:

$$y \circ y^{-1}(x) = y^{-1} \circ y(x) = x$$

Proviamo ad effettuare il grafico delle due funzioni :



Notate dal grafico che, dal punto di vista grafico, la funzione inversa si ottiene effettuando una simmetria rispetto alla prima bisettrice della funzione di partenza.

Sfruttando questa proprietà si può utilizzare Derive per eseguire il calcolo della funzione inversa.

Operare una simmetria rispetto alla prima bisettrice significa, dal punto di vista analitico, sostituire nell'espressione di $y(x)$ la y con la x ottenendo $x = f(y)$ esplicitando poi rispetto alla y .

Riprendendo l'esempio (2) otteniamo:

- ✓ Sostituiamo la y con la x : $x = 4y - 1$
- ✓ Esplicitiamo la y : $y = (x + 1) / 4$
- ✓ La y così ottenuta è la nostra funzione inversa

Con Derive le operazioni da seguire sono le seguenti:

1. Sostituire la y con la x per ottenere $x(y)$
2. Digitare il comando SOLVE($x(y), y$)
3. Selezionare la voce di menù 'semplifica base' per ottenere la funzione inversa

Esempio:

1. $x = 4y - 1$
2. SOLVE($x = 4y - 1, y$)
3. 'Semplifica base' : $y = (x + 1) / 4$

Problema:

Siano date le seguenti funzioni:

a) $f(x) = 4x$

b) $g(x) = 3x + 3$

c) $h(x) = 1 / (x - 1)$

d) $i(x) = (2x - 1) / (x + 3)$

e) $l(x) = x^2$

f) $m(x) = \sqrt{x}$

g) $n(x) = x$

h) $o(x) = 5$

Determinate la funzione inversa utilizzando Derive, effettuare il grafico di f , f^{-1} e la bisettrice del primo quadrante, verificare che la f^{-1} trovata rispetti la proprietà (1).

Riportate sul vostro foglio le funzioni ottenute, i grafici, la prova della (1) e tutti i commenti che ritenete opportuni.

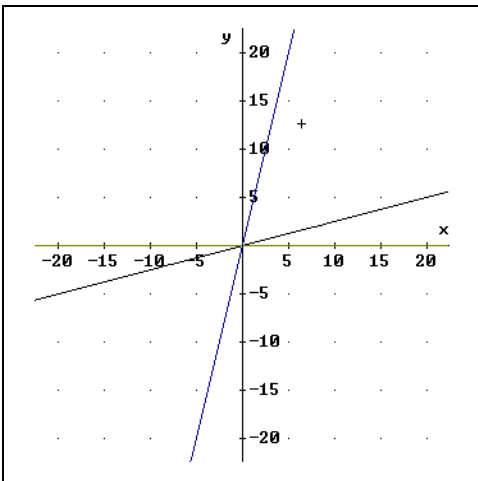
RISOLUZIONE:

$$y = 4 \cdot x$$

$$x = 4 \cdot y$$

SOLVE($x = 4 \cdot y, y$)

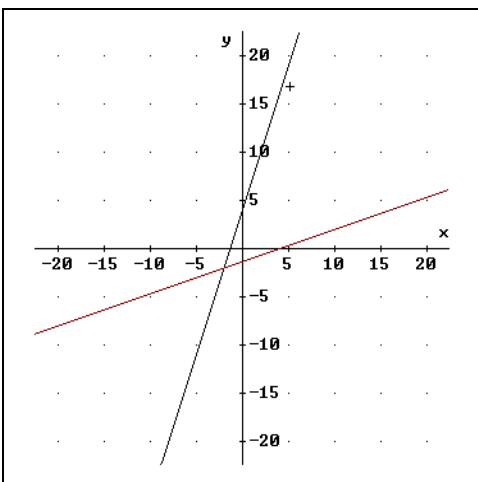
$$y = \frac{x}{4}$$



$$y = 3 \cdot x + 4$$

SOLVE($x = 3 \cdot y + 4, y$)

$$y = \frac{x - 4}{3}$$

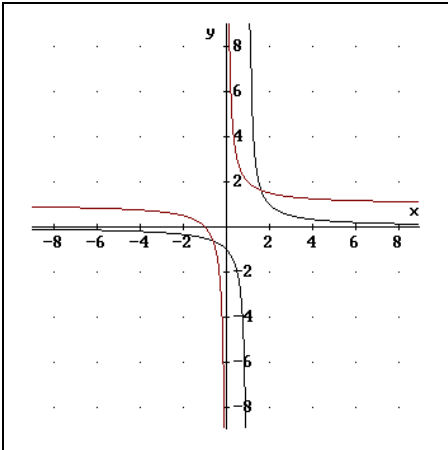


$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$x - 1$$

$$\text{SOLVE } \left\{ x = \frac{1}{y-1}, y \right\}$$

$$y = \frac{1}{x} + 1$$



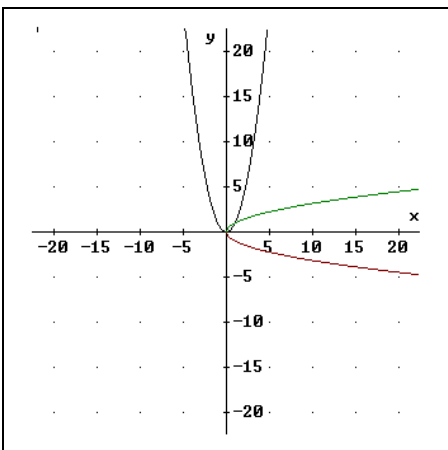
$$2$$

$$y = x$$

$$2$$

$$\text{SOLVE } (x = y^2, y)$$

$$y = -\text{SQRT}(x) \vee y = \text{SQRT}(x)$$

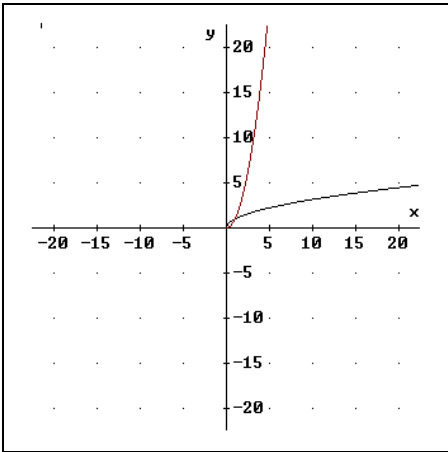


$$y = \text{SQRT}(x)$$

$$\text{SOLVE } (x = \text{SQRT}(y), y)$$

$$2$$

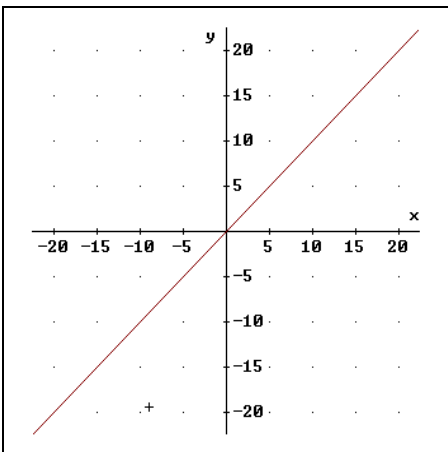
$$y = \text{IF}(x > 0, x)$$



$$y = x$$

SOLVE(x = y, y)

$$y = x$$



$$y = 5$$

SOLVE(x = 5, y)

$$x = 5$$

