Esercitazione di laboratorio di matematica

Trasformazione di funzioni: traslazione e dilatazione

Obiettivo dell'esercitazione: comporre la traslazione e la dilatazione di una funzione utilizzando il programma applicativo derive.

Teoria: Studiamo la trasformazione di un punto P(x,y) nel punto P'(x',y') secondo le seguenti equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + c \\ y' = by + d \end{cases}$$

Se per esempio a=2 , c=1 e b=4, d=-2 la (1) diventa:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 4y - 2 \end{cases}$$

Vediamo cosa accade per i punti

$P_1(0;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(2;3)$

applicando la trasformazione (2), otteniamo:

$P'_1(1;-2)$, $P'_2(3;2)$, $P'_3(5;10)$

Vogliamo ora calcolare l'espressione di una funzione y = f(x) sottoposta alla trasformazione descritta dalle equazioni (1), cioe' vogliamo trovare l'espressione:

$$(3) \qquad y' = f(x')$$

Per far questo risolviamo la (1) rispetto alla coppia (x,y), troviamo:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' - c}{a} \\ y = \dfrac{y' - d}{b} \end{cases}$$

andiamo quindi a sostituire le (x,y) nella funzione di partenza y = f(x) ed eseguendo dei calcoli algebrici troviamo l'espressione nella forma (3), cioe' l'espressione della funzione che ha subito la trasformazione descritta dalla (1).

Modalita' operative:

Trasformazione di un punto:

Consideriamo il punto P(1,2) e le equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 3y - 1 \end{cases}$$

otteniamo il punto P'(3,5)

Eseguiamo con derive i seguenti passaggi:

1. Definiamo il punto P: `p := [[1, 2]]`
2. Grafichiamo il punto P
3. Definiamo il punto Q (P'): `q := [[1*2+1, 2*3-1]]`
4. Grafichiamo il punto trasformato

<u>Trasformazione di una funzione:</u>
Consideriamo la funzione $y = x^2$ e le equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=y\text{-}2 \end{cases}$$

otteniamo la funzione trasformata $y'=\frac{3}{4}x'^2$

Eseguiamo con derive i seguenti passaggi:

1. Definiamo la funzione $y=x^2$: `y:=x^2`
2. Grafichiamo la funzione y
3. Definiamo il sistema di equazioni della traslazione:
   `SOLVE([u = 2x +1, w = y -2], [x, y])`

N.B. Al posto della coppia(x',y') utilizziamo (u,w)

4. Eseguiamo il calcolo con:"Semplifica base", otteniamo:
   `[x = (u-1)/2 ^ y = w + 2]`
   Questa e' il sistema (4) che ci serve per trovare l'espressione della funzione trasformata.
5. Sostituiamo alla funzione di partenza il risultato ottenuto:
   `w + 2  = ((u-1)/2)^2`
6. Grafichiamo la funzione w (cioe' y')

Esaminando il grafico osserviamo che sono presenti sul piano cartesiano due funzioni: la y e la sua trasformata w (cioe' y')

Problema:
Eseguire le trasformazione dei seguenti punti date l'equazioni di trasformazione:

a) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=y \end{cases}$

b) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y+1 \end{cases}$

c) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=2x+4 \\ y'=y \end{cases}$

d) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y+4 \end{cases}$

e) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=4x+1 \\ y'=y \end{cases}$

f) P(0,0), P(-1,-2), P(2,4) $\begin{cases} x'=4x+1 \\ y'=4y+1 \end{cases}$

Eseguire le trasformazioni delle seguenti funzioni date l'equazioni di trasformazione:

g)	`y=x^2-2`	$\begin{Bmatrix} x'=2x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+1 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=2x+4 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+4 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=4y+1 \end{Bmatrix}$
h)	`y=x+ 2`	$\begin{Bmatrix} x'=2x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+1 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=2x+4 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+4 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=4y+1 \end{Bmatrix}$
i)	`y=sin(x)`	$\begin{Bmatrix} x'=2x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+1 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=2x+4 \\ y'=y \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=x \\ y'=2y+4 \end{Bmatrix}$,	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=y \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x'=4x+1 \\ y'=4y+1 \end{Bmatrix}$

Riportate sul vostro foglio i punti e le funzioni ottenute ed loro grafici e tutti i commenti che ritenete opportuni. Individuate quale sia il reale vettore di traslazione e riportatelo vicino al grafico. Per la sola funzione del punto i) individuate il periodo e riportatelo vicino al grafico.